

В.А.Медик, М.С.Токмачев

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В МЕДИЦИНЕ

Рекомендовано

**Министерством образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений, обучающихся по специальностям
"Лечебное дело", "Сестринское дело", "Педиатрия",
"Медико-профилактическое дело", "Стоматология", "Фармация",
"Статистика", "Прикладная математика и информатика"**



**МОСКВА
"ФИНАНСЫ И СТАТИСТИКА"
2007**

УДК 61:519.2(075.8)

ББК 5в631.8я72

М42

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Ю.П. Лисицын,

академик Российской академии медицинских наук,
профессор, Заслуженный деятель науки РФ,
председатель Центральной методической комиссии
Министерства здравоохранения и социального развития РФ
по общественному здоровью и здравоохранению,
заведующий кафедрой
Российского государственного медицинского университета;

В.Г. Дегтярев,

доктор технических наук, профессор,
академик Международной академии наук высшей школы,
Заслуженный деятель науки и техники РФ,
Председатель Научно-методического совета по математике
вузов Северо-Запада РФ

Медик В.А., Токмачев М.С.

М42 Математическая статистика в медицине: учеб. пособие / В.А. Медик, М.С. Токмачев. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 800 с.: ил.
ISBN 978-5-279-03195-5

Изложены основы теории вероятностей и математической статистики, широко используемые в медицине и здравоохранении. Наряду с классическими разделами подробно представлены также весьма актуальные разделы, как непараметрические критерии, временные ряды, анализ выживаемости и др. Основной акцент сделан на аналитические методы исследования. Теоретический материал проиллюстрирован многочисленными примерами анализа данных из области медицины и здравоохранения. Большое внимание уделено выводам и интерпретации результатов расчета.

Для студентов и аспирантов, обучающихся по медицинским специальностям и специальности «Прикладная математика и информатика», а также для медицинских работников и организаторов здравоохранения. Может быть полезно для исследователей в других областях знаний.

М 1602090000 – 057
010(01) – 2007 без объявл.

УДК 61:519.2(075.8)
ББК 5в631.8я72

ISBN 978-5-279-03195-5

© Медик В.А., Токмачев М.С., 2007

© Издательство «Финансы и статистика», 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----------|
| Предисловие | 9 |
| Введение | 11 |
| Глава 1. Случайные события | 13 |
| 1.1. О теории вероятностей | 13 |
| 1.2. Основные понятия и определения | 16 |
| 1.3. Понятие о вероятности случайного события | 20 |
| 1.4. Классическое определение вероятности | 22 |
| 1.5. Элементы комбинаторики | 23 |
| 1.6. Вероятность суммы событий. Противоположные события | 33 |
| 1.7. Условная вероятность. Зависимые и независимые события | 36 |
| 1.8. Формула полной вероятности. Формула Байеса | 42 |
| 1.9. Геометрическая вероятность | 48 |
| 1.10. Статистическое определение вероятности | 51 |
| 1.11. Понятие об аксиоматическом построении теории вероятностей | 55 |
| 1.12. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли | 57 |
| 1.13. Приближенные формулы, используемые в схеме Бернулли | 64 |
| 1.13.1. Приближенная формула Пуассона | 64 |
| 1.13.2. Локальная теорема Муавра–Лапласа | 68 |
| 1.14. Функция Лапласа. Интегральная теорема Муавра–Лапласа | 69 |
| 1.15. Теорема Бернулли (закон больших чисел) | 76 |
| 1.16. Цепи Маркова | 79 |
| Задачи и упражнения | 86 |
| Глава 2. Случайные величины | 93 |
| 2.1. Понятия и определения | 93 |
| 2.2. Закон распределения случайной величины. Функция распределения вероятностей | 95 |
| 2.3. Дискретные случайные величины и их числовые характеристики | 101 |
| 2.4. Биномиальное распределение | 111 |
| 2.5. Распределение Пуассона | 115 |
| 2.6. Примеры применения биномиального и пуассоновского распределений | 117 |
| 2.7. Некоторые дискретные распределения | 125 |
| 2.7.1. Вырожденное распределение | 126 |
| 2.7.2. Дискретное равномерное распределение | 126 |
| 2.7.3. Геометрическое распределение | 128 |
| 2.7.4. Отрицательное биномиальное распределение (распределение Паскаля) | 128 |
| 2.7.5. Гипергеометрическое распределение | 130 |
| 2.7.6. Распределение Пойа (Поляна) | 131 |

| | | |
|-----------------|--|------------|
| 2.8. | Непрерывные случайные величины | 134 |
| 2.9. | Равномерное распределение на отрезке | 137 |
| 2.10. | Нормальное распределение | 140 |
| 2.11. | Числовые характеристики распределений | 144 |
| 2.12. | Некоторые непрерывные распределения | 146 |
| 2.12.1. | Показательное распределение | 147 |
| 2.12.2. | Двойное показательное распределение | 149 |
| 2.12.3. | Распределение Шарлье | 151 |
| 2.12.4. | Гамма-распределение | 152 |
| 2.12.5. | Распределение типа гиперболического косинуса | 153 |
| 2.12.6. | Распределение типа гиперболического синуса | 156 |
| 2.12.7. | Логарифмически нормальное (логнормальное) распределение | 158 |
| | Задачи и упражнения | 160 |
| Глава 3. | Системы случайных величин | 165 |
| 3.1. | Функция распределения и плотность распределения системы случайных величин | 165 |
| 3.2. | Зависимые и независимые случайные величины | 168 |
| 3.3. | Моменты системы случайных величин. Ковариация | 169 |
| 3.4. | Свойства моментов | 172 |
| 3.4.1. | Свойства математического ожидания | 172 |
| 3.4.2. | Свойства дисперсии | 173 |
| 3.4.3. | Свойства корреляционных моментов | 174 |
| 3.5. | Независимость и некоррелированность случайных величин. Коэффициент корреляции | 174 |
| 3.6. | Система двух дискретных случайных величин | 177 |
| 3.7. | Функции случайных величин | 179 |
| 3.7.1. | Линейная функция одной случайной величины | 180 |
| 3.7.2. | Линейная функция двух случайных величин | 182 |
| 3.7.3. | Произведение двух случайных величин | 183 |
| 3.7.4. | Частное от деления двух случайных величин | 183 |
| 3.8. | Специальные распределения | 184 |
| 3.8.1. | Распределение Пирсона (распределение χ^2) | 184 |
| 3.8.2. | Распределение Стьюдента (t -распределение) | 186 |
| 3.8.3. | Распределение Фишера (F -распределение) | 187 |
| 3.9. | Условное распределение. Регрессия. Среднеквадратическая регрессия | 188 |
| 3.10. | Предельные теоремы | 194 |
| 3.10.1. | Закон больших чисел | 195 |
| 3.10.2. | Центральная предельная теорема | 198 |
| | Задачи и упражнения | 199 |

| | |
|--|-----|
| Глава 4. Выборочный метод | 203 |
| 4.1. Предмет и задачи | 203 |
| 4.2. Основные понятия выборочного метода | 204 |
| 4.3. Выборочное распределение и его характеристики | 206 |
| 4.4. Преобразования выборок | 212 |
| 4.5. Графический метод представления статистических данных | 215 |
| 4.6. Методика выравнивания статистических рядов | 218 |
| 4.7. Критерии согласия | 222 |
| 4.8. Приближенная проверка гипотезы о нормальном распределении | 225 |
| Задачи и упражнения | 228 |
| Глава 5. Оценки параметров распределения | 232 |
| 5.1. Особенности малых выборок. Точечные оценки | 232 |
| 5.2. Точечные оценки для математического ожидания и дисперсии | 236 |
| 5.3. Распределения некоторых статистик | 240 |
| 5.4. Интервальные оценки. Доверительные интервалы | 245 |
| 5.5. Построение доверительных интервалов для математического ожидания | 246 |
| 5.6. Доверительные интервалы для дисперсии | 253 |
| 5.7. Доверительный интервал для разности средних | 259 |
| 5.8. Оценка вероятности по частоте | 262 |
| 5.9. Ошибка выборки. Оптимальная численность выборки | 267 |
| Задачи и упражнения | 271 |
| Глава 6. Проверка статистических гипотез | 275 |
| 6.1. Статистическая гипотеза | 275 |
| 6.2. Статистические критерии | 278 |
| 6.3. Сравнение дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей | 282 |
| 6.4. Проверка гипотезы о равенстве неизвестной дисперсии конкретному значению | 287 |
| 6.5. Сравнение средних двух нормальных генеральных совокупностей при известных дисперсиях | 292 |
| 6.6. Критерий Стьюдента. Сравнение средних двух нормальных генеральных совокупностей при неизвестных одинаковых дисперсиях | 298 |
| 6.7. Сравнение выборочной средней с известной величиной. Наблюдения до и после эксперимента | 304 |
| 6.8. Мощность критерия | 311 |
| 6.8.1. Уровень значимости | 311 |
| 6.8.2. Величина различий (параметр нецентральности) | 313 |
| 6.8.3. Объем выборки | 316 |
| 6.9. Проверка гипотез о вероятности в схеме Бернулли (одна генеральная совокупность) | 319 |
| 6.10. Проверка гипотез о вероятности в схеме Бернулли (две сравниваемые генеральные совокупности) | 324 |

| | |
|--|------------|
| 6.11. Таблицы сопряженности и критерий χ^2 | 329 |
| 6.12. Критерий для показателя смертности с учетом возрастных параметров | 335 |
| 6.13. Критерий Кочрена сравнения дисперсий нескольких нормальных генеральных совокупностей | 338 |
| 6.14. Критерий Бартлетта сравнения дисперсий нескольких генеральных совокупностей | 340 |
| Задачи и упражнения | 342 |
| Глава 7. Дисперсионный анализ. Множественные сравнения | 350 |
| 7.1. Основные понятия дисперсионного анализа | 350 |
| 7.2. Суммы квадратов отклонений. Общая, факторная и остаточная дисперсии | 353 |
| 7.3. Однофакторный дисперсионный анализ | 357 |
| 7.4. Однофакторный дисперсионный анализ в случае разного числа испытаний на различных уровнях | 362 |
| 7.5. Схема двухфакторного дисперсионного анализа | 366 |
| 7.6. Множественные сравнения. Критерий Стьюдента с поправкой Бонферрони | 371 |
| 7.7. Критерий Ньюмена–Кейлса | 375 |
| Задачи и упражнения | 378 |
| Глава 8. Анализ зависимостей | 385 |
| 8.1. Типы зависимостей случайных величин | 385 |
| 8.2. Выборочный коэффициент корреляции | 388 |
| 8.3. Проверка независимости признаков | 392 |
| 8.4. Проверка гипотезы о силе линейной связи двух признаков | 394 |
| 8.5. Выборочная регрессия | 396 |
| 8.6. Параметры выборочного уравнения регрессии при линейной зависимости | 400 |
| 8.7. Проверка гипотез о параметрах уравнения регрессии | 406 |
| 8.8. Использование линейной регрессии в случае нелинейной зависимости | 407 |
| 8.9. Мера корреляционной связи. Выборочное корреляционное отношение | 409 |
| 8.10. Простейшие случаи нелинейной регрессии | 413 |
| 8.11. Модель множественной линейной регрессии | 420 |
| 8.12. Качество моделей множественной регрессии | 429 |
| 8.13. Методика построения модели множественной регрессии | 443 |
| 8.14. Использование регрессионных моделей для прогнозирования | 446 |
| 8.15. Выборочный коэффициент ранговой корреляции Спирмена | 450 |
| 8.16. Непараметрические методы оценки корреляционной зависимости | 455 |
| Задачи и упражнения | 459 |

| | |
|---|-----|
| Глава 9. Непараметрические критерии | 465 |
| 9.1. Условия использования критериев | 465 |
| 9.2. Критерий Манна–Уитни (критерий однородности) | 466 |
| 9.3. Критерий Уилкоксона (наблюдения до и после эксперимента) | 474 |
| 9.4. Критерий знаков | 481 |
| 9.5. Критерий Краскала–Уоллиса (проверка однородности нескольких групп) | 484 |
| 9.6. Критерий Фишера (угловое преобразование Фишера) | 487 |
| 9.7. Гипотеза о независимости элементов выборки | 490 |
| 9.7.1. Критерий серий, основанный на медиане | 491 |
| 9.7.2. Критерий «восходящих» и «нисходящих» серий | 493 |
| 9.7.3. Критерий минимумов и максимумов | 495 |
| 9.7.4. Критерий Аббе | 496 |
| Задачи и упражнения | 498 |
| Глава 10. Временные ряды | 506 |
| 10.1. Основные понятия | 506 |
| 10.2. Изменение уровней ряда | 512 |
| 10.3. Вычисление средних | 520 |
| 10.4. Выравнивание временных рядов | 527 |
| 10.5. Структура временного ряда | 536 |
| 10.6. Сезонная декомпозиция временного ряда по мультипликативной модели | 537 |
| 10.7. Завершение процесса декомпозиции временного ряда по мультипликативной модели | 543 |
| 10.8. Аддитивная модель временного ряда | 548 |
| 10.9. Проверка адекватности модели временного ряда | 555 |
| 10.10. Оценка точности модели | 561 |
| 10.11. Прогнозирование. Простейшие модели | 569 |
| 10.12. Прогнозирование с учетом сезонности | 581 |
| 10.13. Экспоненциальное сглаживание | 588 |
| 10.13.1. Простое экспоненциальное сглаживание | 589 |
| 10.13.2. Экспоненциальное сглаживание в модели с трендом | 596 |
| 10.13.3. Экспоненциальное сглаживание в модели с трендом и сезонностью | 604 |
| 10.14. Авторегрессионные модели | 612 |
| Задачи и упражнения | 617 |

| | |
|--|-----|
| Глава 11. Анализ выживаемости | 624 |
| 11.1. Вид данных | 624 |
| 11.2. Функция выживания и ее связь с функцией распределения | 625 |
| 11.3. Статистический подход к исследованию выживаемости | 628 |
| 11.4. Расчет выживаемости методом Каплана–Мейера | 629 |
| 11.5. Таблицы времен жизни | 635 |
| 11.6. Сравнение функций выживания. Логранговый критерий | 643 |
| 11.7. Регрессионные модели | 650 |
| Задачи и упражнения | 652 |
| | |
| Глава 12. Показатели и индексы в оценке общественного и индивидуального здоровья | 656 |
| 12.1. Основные понятия и определения | 656 |
| 12.2. Обзор интегральных показателей оценки здоровья | 659 |
| 12.3. Показатели и соотношения, используемые для оценки физического развития | 662 |
| 12.4. Модели некоторых интегральных показателей оценки здоровья населения | 675 |
| 12.5. Разработка ряда показателей общественного здоровья на основе цепей Маркова | 680 |
| 12.5.1. Вероятностная модель жизни человека | 680 |
| 12.5.2. Прогнозирование средней продолжительности жизни в зависимости от возраста и состояния здоровья | 683 |
| 12.5.3. Прогнозирование средней продолжительности жизни фактического населения | 685 |
| 12.5.4. Показатели, характеризующие состояния здоровья | 688 |
| 12.6. Комплексная оценка общественного здоровья индексным методом | 693 |
| | |
| Приложения | 705 |
| | |
| Глоссарий | 766 |
| | |
| Библиографический список | 786 |
| | |
| Ответы к задачам и упражнениям | 791 |